دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده مهندسی عمران

تئوری الاستیسیته ۱

نیمسال اول ۹۴-۹۳

17
18
20

تمرین شماره ۳

مدرس:

دکتر کاظمی

دانشجو:

محمد علی ترکمان اسدی

۹۲۳۰۱۵۹۳

۹۳/۰۹/۰۲

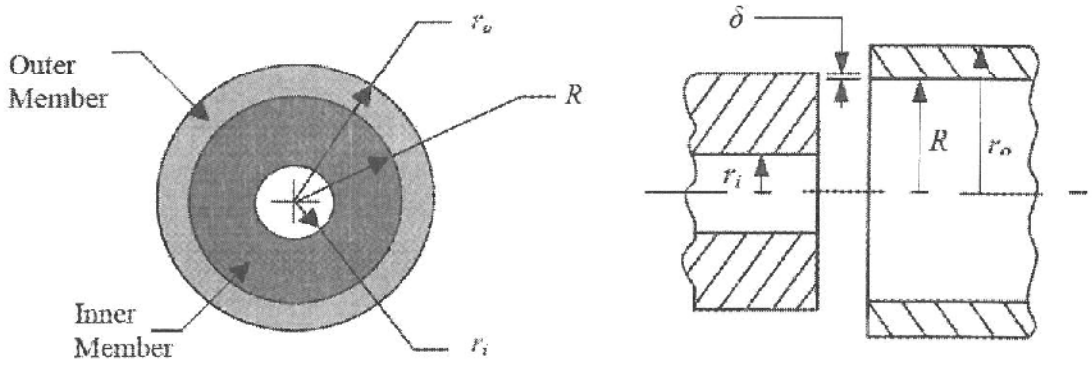
www. Civil File .com
سیویل فایل مرجع فایل های مهندسی عمران

سوال:

دو سیلند با فشار پرس داخل یکدیگر جا انداخته می‌شوند. مقدار تنش‌های ایجاد شده در دو سیلندر و میزان جابجایی شعاعی در مرز بین دو سیلندر را به دست آورید. در حالت بدون تنش، اختلاف بین شعاع داخلی سیلندر خارجی و شعاع خارجی سیلندر داخلی برابر با δ است.

حل مسئله:

شکل مسئله به صورت زیر است.



شکل (۱-۱) نمای روبرو و از سطح مقطع دو استوانه که در هم فیت می‌شوند

که پارامترهای شکل فوق به صورت زیر تعریف می‌شود.

r_i : the inside radius of the inner cylinder

R : nominal radius of internal outside radius and external inside radius after assembly

r_o : outside radius of the outer cylinder

δ : radial interference

سیلندر داخلی:

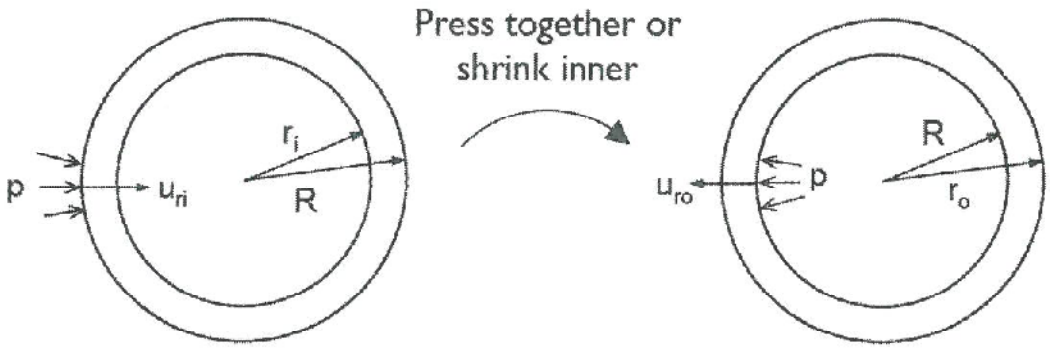
سیلندر داخلی یک فشار خارجی $p_o = p$ به صورت فشاری تحمل می‌کند. با استفاده از تئوری جدار ضخیم داریم

$$(\sigma_\theta)_i\Big|_{r=R} = -p_0\left(\frac{R^2+r_i^2}{R^2-r_i^2}\right) = -pC_{it}\,,$$
$$(\sigma_r)_i\Big|_{r=R} = -p_0 = -p \qquad (۱-۱)$$

سیلندر خارجی:

سیلندر خارجی تنها یک فشار داخلی $p_i = p$ به صورت کششی تحمل می‌کند. با استفاده از تئوری جدار ضخیم داریم

$$(\sigma_\theta)_o\Big|_{r=R} = p_i\left(\frac{R^2+r_i^2}{R^2-r_i^2}\right) = pC_{ot}\,,$$
$$(\sigma_r)_o\Big|_{r=R} = -p_i = -p \qquad (۲-۱)$$



شکل (۱-۲) میدان تنش و جابجایی در مرز بین دو سیلندر

معادله خیز:

خیز کل بین دو سیلندر برابر است با

$$\delta = \left|u_{ri}\right| + \left|u_{ro}\right| \qquad (۳-۱)$$

که u_{ri} کاهش شعاع در سیلندر داخلی و u_{ro} افزایش شعاع در سیلندر خارجی است. با استفاده از قانون هوک داریم

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E}\left(\sigma_\theta - \nu\sigma_r\right) \qquad (۴-۱)$$

از روابط ارائه شده در درس نیز رابطه زیر به دست آمده است

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} \qquad (۵-۱)$$

لذا

$$u = \varepsilon_\theta r = \frac{r}{E}\left(\sigma_\theta - \nu\sigma_r\right) \qquad (۶-۱)$$

با توجه به رابطه فوق داریم

$$\begin{cases} u_{ri} = -\dfrac{pR}{E_i}\left(\dfrac{R^2 + r_i^2}{R^2 - r_i^2} - \nu_i\right) & , \quad \text{inner cylinder} \\ u_{ro} = -\dfrac{pR}{E_o}\left(\dfrac{R^2 + r_o^2}{R^2 - r_o^2} - \nu_i\right) & , \quad \text{outer cylinder} \end{cases} \tag{۱-۷}$$

با توجه به معادله سازگاری (رابطه (۱-۳)) و دانستن مقدار δ، می‌توان پارامتر فشار (p) را محاسبه کرد. در نهایت با داشتن مقدار p، با استفاده از روابط ارائه شده مقدار عددی تنش‌ها نیز بدست می‌آید.

σ_r ?

σ_θ ?

$\boxed{p\ ?}$

دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده مهندسی عمران

18.5

تئوری الاستیسیته ۱

نیمسال اول ۹۴-۹۳

تمرین شماره ۱

مدرس:

دکتر کاظمی

دانشجو:

محمد علی ترکمان اسدی

۹۲۳۰۱۵۹۳

۹۳/۰۷/۲۶

www. Civil File .com
سیویل فایل مرجع فایل های مهندسی عمران

فهرست مطالب

سوال ۱ : تمرین ۱۳ صفحه ۸۴ مرجع [1] ۱

پاسخ قسمت (الف) ۱

پاسخ قسمت (ب) ۱

سوال ۲ : تمرین ۶ صفحه ۹۳ ..... ۲

پاسخ قسمت (الف) ۳

پاسخ قسمت (ب) ۳

پاسخ قسمت (پ) ۴

پاسخ قسمت (ت) ۴

سوال ۳: تمرین ۷ صفحه ۹۳ ..... ۵

پاسخ قسمت (الف) ۵

پاسخ قسمت (ب) ۶

سوال ۴ : تمرین ۸ صفحه ۹۳ ..... ۷

سوال ۵ : تمرین ۹ صفحه ۹۳ ..... ۷

سوال ۶: تمرین ۱۰ صفحه ۹۳ ..... ۸

سوال ۷: تمرین ۱۱ صفحه ۹۳ ..... ۹

سوال ۸: تمرین ۲ صفحه ۱۳۵ ..... ۱۰

مرجع ۱۲

سوال ۱ : تمرین ۱۳ صفحه ۸۴ مرجع [1]

ماتریس تنش $\mathbf{T}$ در دستگاه xyz و ماتریس انتقال به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 50 & 37.5 & 0 \\ 37.5 & -25 & -50 \\ 0 & -50 & 25 \end{bmatrix} \tag{۱-۱}$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \tag{۱-۲}$$

پاسخ قسمت (الف)

برای بدست آوردن بردارهای ترکشن در صفحات دستگاه جدید نسبت به مولفه‌های تنش در دستگاه قدیم از رابطه زیر استفاده می‌کنیم

$$\mathbf{t}^{(i)} = \mathbf{T}^t \mathbf{n}^{(i)} \quad , \quad i=1..3 \tag{۱-۳}$$

در نتیجه

$$\mathbf{t}^{(1)} = \begin{bmatrix} 50 & 37.5 & 0 \\ 37.5 & -25 & -50 \\ 0 & -50 & 25 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 3/5 \\ 0 \\ 4/5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 30 \\ 62.5 \\ -20 \end{Bmatrix}$$

13-b

$$\mathbf{t}^{(2)} = \begin{bmatrix} 50 & 37.5 & 0 \\ 37.5 & -25 & -50 \\ 0 & -50 & 25 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 37.5 \\ -25 \\ -50 \end{Bmatrix} \tag{۱-۴}$$

$$\mathbf{t}^{(3)} = \begin{bmatrix} 50 & 37.5 & 0 \\ 37.5 & -25 & -50 \\ 0 & -50 & 25 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 4/5 \\ 0 \\ 3/5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 40 \\ 0 \\ 15 \end{Bmatrix}$$

پاسخ قسمت (ب)

مولفه‌های تانسور تنش $\overline{\mathbf{T}}$ را با استفاده از رابطه زیر بدست می‌آوریم (رابطه ۳.۲.۸ مرجع)

$$\overline{\mathbf{T}} = \mathbf{N}^T \mathbf{T} \mathbf{N} \tag{۱-۵}$$

در نتیجه

$$\bar{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 0 & \frac{-4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50 & 37.5 & 0 \\ 37.5 & -25 & -50 \\ 0 & -50 & 25 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \qquad (۶-۱)$$

$$\bar{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} 34 & 62.5 & 12 \\ 62.5 & -25 & 0 \\ 12 & 0 & 41 \end{bmatrix}$$

13-a

جواب بصورت کامل ارائه شود

سوال ۲ : تمرین ۶ صفحه ۹۳

ماتریس تنش به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{12} & T_{22} & T_{23} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{bmatrix} \qquad (۱-۲)$$

نامتغیرهای تنش نیز برابر است با

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_T &= \mathrm{tr}\ \mathbf{T} = T_{11} + T_{22} + T_{33} = T_{ii} \\ \mathrm{II}_T &= T_{11}T_{22} + T_{22}T_{33} + T_{33}T_{11} - T_{12}^2 - T_{23}^2 - T_{31}^2 = \frac{1}{2}\left(T_{ii}T_{jj} - T_{ij}T_{ji}\right) \\ \mathrm{III}_T &= \det \mathbf{T} \end{aligned} \qquad (۲-۲)$$

روابط معرف تنش هیدرواستاتیک و تنش انحرافی به صورت زیر است.

$$\sigma = -p = \frac{1}{3}T_{kk} \qquad (۳-۲)$$

$$\mathbf{T}' = \mathbf{T} - \sigma\mathbf{I} \qquad (۴-۲)$$

طبق متغیرهای تعریف شده در صورت مسئله، ماتریس تنش انحرافی برابر خواهد بود با

$$\mathbf{T}' = \begin{bmatrix} s_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & s_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & s_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T'_{11} & T'_{12} & T'_{13} \\ T'_{12} & T'_{22} & T'_{23} \\ T'_{13} & T'_{23} & T'_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{bmatrix} \qquad (۵-۲)$$

پاسخ قسمت (الف)

به صورت زیر نشان داده می‌شود که اولین نامتغیر تنش انحرافی برابر با صفر است.

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_{T'} &= \mathrm{tr}\ \mathbf{T}' = \left(s_x - \sigma\right) + \left(s_y - \sigma\right) + \left(s_z - \sigma\right) \\ &= s_x + s_y + s_z - 3\sigma \\ &= s_x + s_y + s_z - 3\left(\frac{1}{3}\left(s_x + s_y + s_z\right)\right) = 0 \end{aligned} \tag{۲-۶}$$

طبق تعریف مسئله نامتغیر دوم برابر است با

$$\mathrm{II}_{T'} = -\left(s_x s_y + s_y s_z + s_x s_z\right) - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2 \tag{۲-۷}$$

با توجه به صفر بودن اولین نامتغیر اول لذا عبارت

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{I}_{T'}^2}{2} &= 0 \\ &= \frac{1}{2}\left(s_x + s_y + s_z\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(s_x^2 + s_y^2 + s_z^2\right) + s_x s_y + s_y s_z + s_x s_z = 0 \end{aligned} \tag{۲-۸}$$

با جمع دو رابطه اخیر با یکدیگر، رابطه زیر بدست می‌آید.

$$\begin{aligned} \mathrm{II}_{T'} &= -\left(s_x s_y + s_y s_z + s_x s_z\right) - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(s_x^2 + s_y^2 + s_z^2\right) + s_x s_y + s_y s_z + s_x s_z \\ &= \frac{1}{2}\left(s_x^2 + s_y^2 + s_z^2\right) - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2 \end{aligned} \tag{۲-۹}$$

که به صورت فوق رابطه خواسته شده بدست می‌آید.

پاسخ قسمت (ب)

مانند قسمت قبل داریم

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{I}_{T'}^2}{3} &= 0 \\ &= \frac{1}{3}\left(s_x + s_y + s_z\right)^2 \\ &= \frac{1}{3}\left(s_x^2 + s_y^2 + s_z^2\right) + \frac{2}{3}\left(s_x s_y + s_y s_z + s_x s_z\right) = 0 \end{aligned} \tag{۲-۱۰}$$

با جمع دو رابطه اخیر با یکدیگر، رابطه زیر بدست می‌آید.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{II}_{T'} &= -\left(s_x s_y + s_y s_z + s_x s_z\right) - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2 \\
&\quad + \frac{1}{3}\left(s_x^2 + s_y^2 + s_z^2\right) + \frac{2}{3}\left(s_x s_y + s_y s_z + s_x s_z\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(s_x^2 + s_y^2 + s_z^2\right) - \frac{1}{3}\left(s_x s_y + s_y s_z + s_x s_z\right) - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2 \\
&= \frac{2}{6}\left(s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 - s_x s_y - s_y s_z - s_x s_z\right) - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2 \\
&= \frac{1}{6}\left(\left(s_x^2 + s_y^2 - 2 s_x s_y\right) + \left(s_y^2 + s_z^2 - 2 s_y s_z\right) + \left(s_z^2 + s_x^2 - 2 s_x s_z\right)\right) \\
&\quad - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2
\end{aligned}
\tag{۱۱-۲}
$$

در نهایت رابطه خواسته شده بدست می‌آید.

$$
\mathrm{II}_{T'} = \frac{1}{6}\left(\left(s_x - s_y\right)^2 + \left(s_y - s_z\right)^2 + \left(s_x - s_z\right)^2\right) - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2 \tag{۱۲-۲}
$$

پاسخ قسمت (پ)

با توجه به اینکه

$$
\begin{aligned}
s_x &= \sigma_x - \sigma\,, \\
s_y &= \sigma_y - \sigma\,, \\
s_z &= \sigma_z - \sigma\,,
\end{aligned}
\tag{۱۳-۲}
$$

لذا

$$
s_x - s_y = \left(\sigma_x - \sigma\right) - \left(\sigma_y - \sigma\right) = \sigma_x - \sigma_y \tag{۱۴-۲}
$$

به طریق مشابه

$$
\begin{aligned}
s_y - s_z &= \sigma_y - \sigma_z \\
s_x - s_z &= \sigma_x - \sigma_z
\end{aligned}
\tag{۱۵-۲}
$$

لذا معادله (۲-۱۲) را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت.

$$
\mathrm{II}_{T'} = \frac{1}{6}\left(\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + \left(\sigma_y - \sigma_z\right)^2 + \left(\sigma_x - \sigma_z\right)^2\right) - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2 \tag{۱۶-۲}
$$

پاسخ قسمت (ت)

با فرض امتدادهای اصلی تنش، تانسور تنش در آن نقطه به صورت زیر خواهد بود

www.CivilFile.com سیویل فایل مرجع فایل های مهندسی عمران

$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix}\sigma_1 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_2 & 0\\ 0 & 0 & \sigma_3\end{bmatrix} \tag{۱۷-۲}$$

تانسور تنش انحرافی نیز برابر خواهد بود با

$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix}\sigma_1-\sigma & 0 & 0\\ 0 & \sigma_2-\sigma & 0\\ 0 & 0 & \sigma_3-\sigma\end{bmatrix} \tag{۱۸-۲}$$

با توجه به روابط (۲-۱۸) و (۲-۹) برابر است با

$$\mathrm{II}_{T'}=\frac{1}{2}\left(s_1^2+s_2^2+s_3^2\right) \tag{۱۹-۲}$$

یا بر اساس روابط (۲-۱۲) و (۲-۱۶) می‌توان نامتغیر دوم تنش انحرافی را به صورت زیر تعریف کرد.

$$\mathrm{II}_{T'}=\frac{1}{6}\left(\left(s_1-s_2\right)^2+\left(s_2-s_3\right)^2+\left(s_1-s_3\right)^2\right) \tag{۲۰-۲}$$

$$\mathrm{II}_{T'}=\frac{1}{6}\left(\left(\sigma_1-\sigma_2\right)^2+\left(\sigma_2-\sigma_3\right)^2+\left(\sigma_1-\sigma_3\right)^2\right) \tag{۲۱-۲}$$

سوال ۳: تمرین ۷ صفحه ۹۳

با فرض اینکه محورهای مختصات در امتدادهای اصلی تنش در یک نقطه باشند، تانسور تنش در آن نقطه به صورت زیر خواهد بود.

$$\mathbf{T}=\begin{bmatrix}\sigma_1 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_2 & 0\\ 0 & 0 & \sigma_3\end{bmatrix} \tag{۱-۳}$$

پاسخ قسمت (الف)

مولفه‌های عمودی σ_n و مماسی τ_n با بردار یکه $\mathbf{n}=n_x\mathbf{i}+n_y\mathbf{j}+n_z\mathbf{k}$ با استفاده از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$t_i=T_{ji}\,n_j \tag{۲-۳}$$

لذا داریم

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_1 &= \sigma_1\, n_1\, \mathbf{i}\,, \\ \mathbf{t}_2 &= \sigma_2\, n_2\, \mathbf{j}\,, \\ \mathbf{t}_3 &= \sigma_3\, n_3\, \mathbf{k} \end{aligned} \tag{۳-۳}$$

مولفه عمودی تنش روی صفحه عبارت است از

$$\sigma_n = t_i^{(n)} n_i \tag{۴-۳}$$

$$\sigma_n = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 \tag{۵-۳}$$

مولفه‌های مماسی تنش از تفاوت روابط (۳-۵) با (۳-۳) بدست می‌آید.

$$\begin{aligned} \tau_n &= \sqrt{|\mathbf{t}|^2 - \sigma_n^2} \\ &= \left(\left((\sigma_1\, n_1)^2 + (\sigma_2\, n_2)^2 + (\sigma_3\, n_3)^2 \right) - \left(\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{۶-۳}$$

پاسخ قسمت (ب)

برای تعیین بردار واحد $\mathbf{e}_r$ کافی است رابطه (۳-۶) را به صورت حاصل ضرب اسکالر τ_n در یک بردار واحد بنویسیم

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}_n &= \tau_n \hat{\mathbf{e}}_r \\ &= \left(\sigma_1 - (\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2) \right) n_1\, \mathbf{i} \\ &\quad + \left(\sigma_2 - (\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2) \right) n_2\, \mathbf{j} \\ &\quad + \left(\sigma_3 - (\sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2) \right) n_3\, \mathbf{k} \end{aligned} \tag{۷-۳}$$

لذا $\hat{e}_r$ به صورت زیر خواهد بود

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{e}}_r &= \frac{\boldsymbol{\tau}_n}{\tau_n} \\ &= \frac{1}{\left(b - c^2\right)^{\frac{1}{2}}} \left(\left(\sigma_1 - c\right) n_1\, \mathbf{i} + \left(\sigma_2 - c\right) n_2\, \mathbf{j} + \left(\sigma_3 - c\right) n_3\, \mathbf{k} \right) \end{aligned} \tag{۸-۳}$$

که

$$\begin{aligned} b &= (\sigma_1\, n_1)^2 + (\sigma_2\, n_2)^2 + (\sigma_3\, n_3)^2 \\ c &= \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 \end{aligned} \tag{۹-۳}$$

سوال ۴ : تمرین ۸ صفحه ۹۳

تانسور تنش در امتدادهای اصلی به صورت زیر است.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \tag{۱-۴}$$

صفحه اکتاهدرال مطابق تعریف دارای بردار یکه‌ای به صورت زیر می‌باشد.

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}\right) \tag{۲-۴}$$

با استفاده از رابطه زیر

$$t_i = T_{ji}\, n_j \tag{۳-۴}$$

داریم

$$t_{01} = \frac{\sigma_1}{\sqrt{3}} \quad , \quad t_{02} = \frac{\sigma_2}{\sqrt{3}} \quad , \quad t_{03} = \frac{\sigma_3}{\sqrt{3}} \tag{۴-۴}$$

لذا

$$\mathbf{t}_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sigma_1\mathbf{i} + \sigma_2\mathbf{j} + \sigma_3\mathbf{k}\right) \tag{۵-۴}$$

اندازه بردار تنش روی صفحه اکتاهدرال برابر مقدار زیر خواهد شد

$$\left|\mathbf{t}_0\right| = \sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}{3}} \tag{۶-۴}$$

سوال ۵ : تمرین ۹ صفحه ۹۳

از رابطه (۳-۵) دیدیم که مولفه عمودی تنش اکتاهدرال برابر است با

$$\sigma_0 = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 \tag{۱-۵}$$

از طرفی همانطور که در مسئله قبل نیز اشاره شد، صفحه اکتاهدرال مطابق تعریف دارای بردار یکه‌ای به صورت زیر می‌باشد.

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}\right) \tag{۲-۵}$$

لذا مولفه عمودی تنش برابر خواهد بود با

$$\sigma_0 = \frac{1}{3}\left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right) = \frac{1}{3}\mathrm{I}_1 \tag{۳-۵}$$

که رابطه فوق معرف همان خواسته مسئله است که اثبات شد.

سوال ۶: تمرین ۱۰ صفحه ۹۳

از معادله (۳-۶) اندازه مولفه تنش برشی بدست آمد. حال برای یک صفحه اکتاهدرال با جایگذاری بردار نرمال رابطه زیر بدست می‌آید.

$$\begin{aligned}\tau_0 &= \left(\left|\mathbf{t}_0\right|^2 - \sigma_0^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}{3} - \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned} \tag{۱-۶}$$

با ساده سازی معادله فوق داریم

$$\tau_0 = \left(\frac{2}{9}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3\right)\right)^{\frac{1}{2}} \tag{۲-۶}$$

از رابطه (۲-۱۱) معادله زیر اثبات شده است.

$$\mathrm{II}_{T'} = \frac{1}{3}\left(s_x^2 + s_y^2 + s_z^2 - s_x s_y - s_y s_z - s_x s_z\right) - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2 \tag{۳-۶}$$

با توجه به معادلات (۶-۲) و (۶-۳) رابطه زیر بدست می‌آید که خواسته مسئله اثبات می‌شود.

$$\tau_0 = \left(\frac{2}{3}\mathrm{II}_{T'}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{۴-۶}$$

سوال ۷: تمرین ۱۱ صفحه ۹۳

از رابطه (۳-۸) برای $\hat{e}_r$ مقدار زیر بدست آمد

$$\hat{\mathbf{e}}_r = \frac{1}{\left(b-c^2\right)^{\frac{1}{2}}}\left(\left(\sigma_1 - c\right)n_1\,\mathbf{i} + \left(\sigma_2 - c\right)n_2\,\mathbf{j} + \left(\sigma_3 - c\right)n_3\,\mathbf{k}\right) \tag{۱-۷}$$

که

$$\begin{aligned} b &= (\sigma_1\, n_1)^2 + (\sigma_2\, n_2)^2 + (\sigma_3\, n_3)^2 \\ c &= \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 \end{aligned} \tag{۲-۷}$$

برای صفحه اکتاهدرال مطابق تعریف دارای بردار یکه‌ای به صورت زیر می‌باشد.

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}\right) \quad \Rightarrow \quad n_1 = n_2 = n_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \tag{۳-۷}$$

لذا $\hat{e}_r$ به صورت زیر خواهد بود

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{3}\left(\sigma_1{}^2 + \sigma_2{}^2 + \sigma_3{}^2\right) \\ c &= \frac{1}{3}\left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right) = \sigma \end{aligned} \tag{۴-۷}$$

که σ همان تنش هیدرو استاتیک است. در نتیجه

$$\hat{\mathbf{e}}_r = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\left(\sigma_1 - \sigma\right)\mathbf{i} + \left(\sigma_2 - \sigma\right)\mathbf{j} + \left(\sigma_3 - \sigma\right)\mathbf{k}\right)}{\left(\frac{1}{3}\left(\sigma_1{}^2 + \sigma_2{}^2 + \sigma_3{}^2\right) - \sigma^2\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{۵-۷}$$

$$\hat{\mathbf{e}}_r = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\sigma_1'\,\mathbf{i} + \sigma_2'\,\mathbf{j} + \sigma_3'\,\mathbf{k}}{\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\left(\sigma_1{}^2 - \sigma^2\right) + \left(\sigma_2{}^2 - \sigma^2\right) + \left(\sigma_3{}^2 - \sigma^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{۶-۷}$$

$$\hat{\mathbf{e}}_r = \frac{\sigma_1'\,\mathbf{i} + \sigma_2'\,\mathbf{j} + \sigma_3'\,\mathbf{k}}{\left(\left(\sigma_1{}^2 - \sigma^2\right) + \left(\sigma_2{}^2 - \sigma^2\right) + \left(\sigma_3{}^2 - \sigma^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{۷-۷}$$

در نهایت می‌توان نشان داد که

$$\hat{\mathbf{e}}_r = \frac{\sigma_1' \mathbf{i} + \sigma_2' \mathbf{j} + \sigma_3' \mathbf{k}}{\left(\sigma_1'^2 + \sigma_2'^2 + \sigma_3'^2\right)^{\frac{1}{2}}} \tag{۸-۷}$$

که خواسته مسئله است.

سوال ۸: تمرین ۲ صفحه ۱۳۵

با توجه به مرجع، روابط زیر موجود است. ماتریس کرنش و ماتریس دوران به صورت زیر است.

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{2}\left(\mathbf{u}\bar{\nabla} + \bar{\nabla}\mathbf{u}\right) \quad , \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_j}\right) \\ \mathbf{\Omega} &= \frac{1}{2}\left(\mathbf{u}\bar{\nabla} - \bar{\nabla}\mathbf{u}\right) \quad , \quad \Omega_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} - \frac{\partial u_j}{\partial X_j}\right) \end{aligned} \tag{۸-۱}$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \tag{۸-۲}$$

کرنش حجمی برابر است با

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \tag{۸-۳}$$

نامتغیر اول نیز به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\mathrm{I}_E = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = Tr\,\mathrm{E} \tag{۸-۴}$$

در نهایت کرنش انحرافی از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} - \frac{1}{3}e\,\mathbf{I} \quad , \quad \varepsilon_{ij}' = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}e\,\delta_{ij} \tag{۸-۵}$$

با توجه به روابط ارائه شده برای اولین ماتریس گرادیان جابجایی به صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$\mathbf{u}\bar{\nabla} = \begin{bmatrix} 9 & 10 & -4 \\ -10 & 18 & -18 \\ -14 & -18 & 27 \end{bmatrix} \times 10^{-1} \quad , \quad \bar{\nabla}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 9 & -10 & -14 \\ 10 & 18 & -18 \\ -4 & -18 & 27 \end{bmatrix} \times 10^{-1} \tag{۸-۶}$$

ماتریس کرنش و ماتریس دوران برابر است با

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 9 & 10 & -4 \\ -10 & 18 & -18 \\ -14 & -18 & 27 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & -10 & -14 \\ 10 & 18 & -18 \\ -4 & -18 & 27 \end{bmatrix}\right) \times 10^{-1}$$
$$= \begin{bmatrix} 9 & 0 & -9 \\ 0 & 18 & -18 \\ -9 & -18 & 27 \end{bmatrix} \times 10^{-1} \qquad (۷-۸)$$

$$\mathbf{\Omega} = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 9 & 10 & -4 \\ -10 & 18 & -18 \\ -14 & -18 & 27 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9 & -10 & -14 \\ 10 & 18 & -18 \\ -4 & -18 & 27 \end{bmatrix}\right) \times 10^{-1}$$
$$= \begin{bmatrix} 0 & 10 & 5 \\ -10 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times 10^{-1} \qquad (۸-۸)$$

کرنش حجمی برابر است با

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$
$$= (9 + 18 + 27) \times 10^{-1} = 5.4 \qquad (۹-۸)$$

کرنش انحرافی نیز به صورت زیر است

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} - \frac{1}{3} e \mathbf{I}$$
$$= \left(\begin{bmatrix} 9 & 0 & -9 \\ 0 & 18 & -18 \\ -9 & -18 & 27 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \end{bmatrix}\right) \times 10^{-1} \qquad (۱۰-۸)$$
$$= \begin{bmatrix} -9 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & -18 \\ -9 & -18 & -9 \end{bmatrix} \times 10^{-1}$$

برای گرادیان جابجایی دوم نیز به صورت مشابه عمل می‌کنیم

$$\mathbf{u}\bar{\nabla} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 \\ -1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \times 10^{-1} \quad ; \quad \bar{\nabla}\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & 2 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix} \times 10^{-1} \qquad (۱۱-۸)$$

ماتریس کرنش و ماتریس دوران برابر است با

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 \\ -1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & 2 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix}\right) \times 10^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix} \times 10^{-1} \qquad (۱۲-۸)$$

$$\mathbf{\Omega} = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 \\ -1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & 2 \\ 4 & 0 & 6 \end{bmatrix}\right) \times 10^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times 10^{-1} \qquad (۱۳-۸)$$

کرنش حجمی برابر است با

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = (4 - 4 + 6) \times 10^{-1} = 0.6 \qquad (۱۴-۸)$$

کرنش انحرافی نیز به صورت زیر است

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} - \frac{1}{3} e \mathbf{I} = \left(\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\right) \times 10^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -6 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \times 10^{-1} \qquad (۱۵-۸)$$

مرجع

1. Lawrence E. Malvern, Introduction to the Mechanics of a continuous medium, Prentice-Hall Inc., 1987

تمرین 3 ، ص 135 انجام نشده است ← −1.5

www.CivilFile.com سیویل فایل مرجع فایل های مهندسی عمران